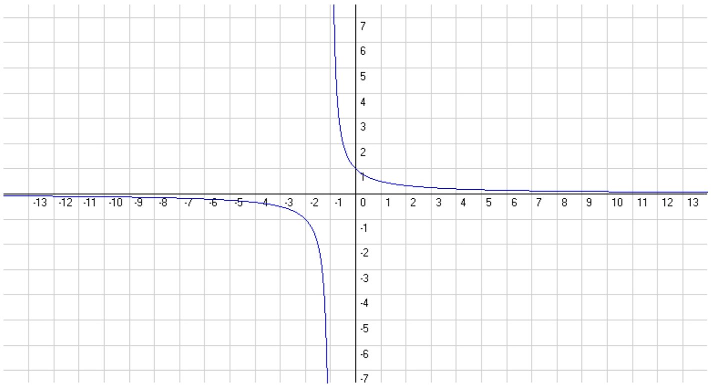
1 část

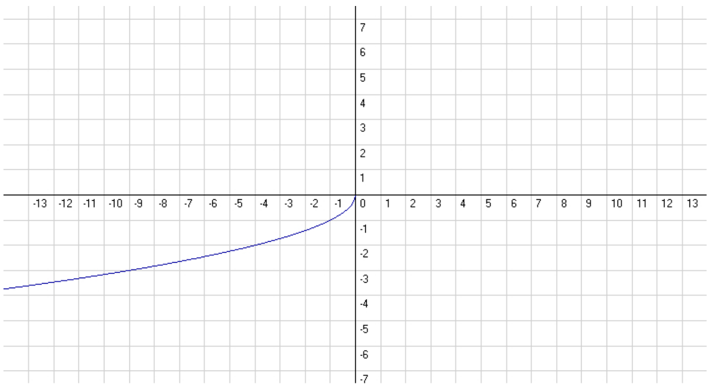
1. Načrtněte graf

$$a)\ f: y = \frac{1}{1+x} \qquad b)\ g: y = -\sqrt{-x}$$

$$a)\ f: y = \frac{1}{1+x}$$



$$b)\ g: y = -\sqrt{-x}$$



2. Určete definiční obor, periodičnost a sudost/lichost

$$f: y = \ln(\sin x)$$

$$\sin: x \in \mathbb{R}$$

$$\ln: \sin x > 0$$

$$D(f) = (k2\pi; \pi + k2\pi), k \in \mathbb{Z}$$

$D(f)$ není symetrický podle počátku $\Rightarrow$ není ani sudá, ani lichá
$f(x+2\pi) = \ln(\sin(x+2\pi)) = \ln(\sin x) = f(x) \ldots$ je periodická

3. Udejte příklad posloupností $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ které splňují:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty, \quad \lim_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = -2$$

$$a_n = -\frac{1}{n}, \quad b_n = 2n, \quad a_n \cdot b_n = -\frac{1}{n} \cdot 2n = -2$$

4. Určete definiční obor, obor hodnot a inverzní funkci k funkci:

$$f : y = \pi + \operatorname{arctg} x$$

$$D(f) = \mathbb{R} = H(f^{-1})$$

$$\operatorname{arctg} x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow H(f) = \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) = D(f^{-1})$$

$$\begin{aligned} f^{-1} : x &= \pi + \operatorname{arctg} y \\ x - \pi &= \operatorname{arctg} y \\ f^{-1} : y &= \operatorname{tg}(x - \pi) \end{aligned}$$

5. Výrokem s kvantifikátory a nerovnostmi zapiště, co znamená:

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} : \ x \in (3; 3+\delta) \Rightarrow f(x) < -\frac{1}{\varepsilon}$$

6. Vypočtěte limitu posloupností:

$$a) \ \left\{3^{\frac{\sqrt{n^2+3n}}{2n}}\right\}_{n=1}^{\infty} \qquad b) \ \left\{\frac{3^n + (-2)^n}{(-3)^n + 2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

$$a) \ \lim_{n\to\infty} 3^{\frac{\sqrt{n^2+3n}}{2n}} = 3^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+3n}}{2n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+3n}}{2n} \overset{n}{=} \frac{\sqrt{1}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} 3^{\frac{\sqrt{n^2+3n}}{2n}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$$b) \ \lim_{n\to\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{(-3)^n + 2^n}$$

$$n = 2k, k \in \mathbb{N} : \ \lim_{k\to\infty} \frac{3^{2k} + (-2)^{2k}}{(-3)^{2k} + 2^{2k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{3^{2k} + 2^{2k}}{3^{2k} + 2^{2k}} \overset{3^{2k}}{=} \frac{1}{1} = 1$$

$$n = 2k+1, k \in \mathbb{N} : \ \lim_{k\to\infty} \frac{3^{2k+1} + (-2)^{2k+1}}{(-3)^{2k+1} + 2^{2k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{3^{2k+1} - 2^{2k+1}}{-3^{2k+1} + 2^{2k+1}} \overset{3^{2k+1}}{=} \frac{1}{-1} = -1$$

$1 \neq -1 \Rightarrow$ daná posloupnost nemá limitu

7. Najděte rovnici tečny ke grafu funkce $f: y = \sqrt{2}\cos 2x$ s bodem dotyku $\left[\frac{8}{\pi}; ?\right]$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{8}\right) &= \sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \\ f'(x) &= \sqrt{2}(-\sin 2x)\cdot 2 = -2\sqrt{2}\sin 2x \\ f'\left(\frac{\pi}{8}\right) &= -2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4} = -2\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = -2 \\ t:\ y &= -2\left(x - \frac{\pi}{8}\right) + 1 \\ t:\ y &= -2x + \frac{\pi}{4} + 1 \end{aligned}$$

8. Přímo z definice vypočtěte derivaci funkce $f: y = \frac{1}{x-2}$ v bodě $x_0 \neq 2$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x_0+h-2}-\frac{1}{x_0-2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{(x_0-2)-(x_0+h-2)}{(x_0+h-2)(x_0-2)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{-h}{(x_0+h-2)(x_0-2)}}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{-1}{(x_0+h-2)(x_0-2)} = \frac{-1}{(x_0-2)(x_0-2)} = \frac{-1}{(x_0-2)^2}$$

9. Určete mezi kterými po sobě jdoucími celými leží kladný kořen rovnice

$$x^3 - 20x - 10 = 0$$

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-10	-29	-42	-43	-26	15

Kladný kořen leží mezi 4 a 5.

2 část

1. Derivujte funkci:

$$f : y = \frac{1}{6} \ln \frac{(x+1)^2}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$$

$$y' = \frac{1}{6} \cdot \frac{x^2 - x + 1}{(x+1)^2} \cdot \frac{2(x+1)(x^2 - x + 1) - (x+1)^2(2x-1)}{(x^2 - x + 1)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} =$$

$$\frac{2x^2 - 2x + 2 - (2x^2 + x - 1)}{6(x+1)(x^2 - x + 1)} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{4x^2 - 4x + 1}{3}} = \frac{-3x + 3}{6(x+1)(x^2 - x + 1)} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{3 + 4x^2 - 4x + 1} =$$

$$\frac{3(-x+1)}{6(x+1)(x^2 - x + 1)} + \frac{2}{4(x^2 - x + 1)} = \frac{-x+1}{2(x+1)(x^2 - x + 1)} + \frac{1}{2(x^2 - x + 1)} =$$

$$\frac{-x + 1 + (x+1)}{2(x+1)(x^2 - x + 1)} = \frac{2}{2(x+1)(x^2 - x + 1)} = \frac{1}{(x+1)(x^2 - x + 1)} = \frac{1}{x^3 + 1}$$

2. Vypočtějte limity:

$$a)\ \lim_{x \to 0} (1 + 2x - x^2)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}} \qquad b)\ \lim_{x \to \infty} \frac{\ln(4 + e^{3x})}{\ln(3 + e^{4x})}$$

$$a)\ \lim_{x \to 0} (1 + 2x - x^2)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}} = ||1^\infty|| = \lim_{x \to 0} e^{\ln (1+2x-x^2)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \ln (1+2x-x^2)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}} = e^{\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \ln (1+2x-x^2)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \ln(1 + 2x - x^2) = ||\infty \cdot 0|| = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + 2x - x^2)}{\operatorname{tg} x} = \left|\left|\frac{0}{0}\right|\right| \overset{L'H}{=}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+2x-x^2} \cdot (2 - 2x)}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x \to 0} \frac{(2 - 2x)\cos^2 x}{1 + 2x - x^2} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\lim_{x \to 0} (1 + 2x - x^2)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}} = e^2$$

$$b)\ \lim_{x \to \infty} \frac{\ln(4 + e^{3x})}{\ln(3 + e^{4x})} = \left|\left|\frac{\infty}{\infty}\right|\right| \overset{L'H}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{4+e^{3x}} \cdot e^{3x} \cdot 3}{\frac{1}{3+e^{4x}} \cdot e^{4x} \cdot 4} = \lim_{x \to \infty} \frac{3e^{3x} \cdot (3 + e^{4x})}{4e^{4x} \cdot (4 + e^{3x})} = \lim_{x \to \infty} \frac{9e^{3x} + 3e^{7x}}{16e^{4x} + 4e^{7x}} \overset{e^{7x}}{=} \frac{3}{4}$$

3. Vyšetřete průběh funkce:

$$f : y = \frac{x}{x^2 - 4}$$

$D(f) = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$

$f(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2 - 4} = -\dfrac{x}{x^2 - 4} = -f(x) \Rightarrow$ je lichá

Není periodická.
Průsečíky s osami:

s osou x: $0 = \dfrac{x}{x^2 - 4} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow P_x = [0; 0] = P_y$

	$-\infty$		-2		0		2		∞
y		$-$	$\emptyset$	$+$	0	$-$	$\emptyset$	$+$	

$$y' = \frac{x^2 - 4 - x \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = -\frac{x^2 + 4}{(x^2 - 4)^2}$$

$x^2 + 4 > 0 \Rightarrow y' \neq 0$

	$-\infty$		-2		2		∞
y'		$-$	$\emptyset$	$-$	$\emptyset$	$-$	
		$\searrow$		$\searrow$		$\searrow$	

Nemá žádný lokální extrém.

$$y'' = \frac{-2x \cdot (x^2 - 4)^2 + (x^2 + 4) \cdot 2(x^2 - 4) \cdot 2x}{(x^2 - 4)^4} = \frac{-2x \cdot (x^2 - 4) + 4x \cdot (x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^3} = \frac{-2x^3 + 8x + 4x^3 + 16x}{(x^2 - 4)^3} =$$

$$\frac{2x^3 + 24x}{(x^2 - 4)^3} = \frac{2x \cdot (x^2 + 12)}{(x^2 - 4)^3}$$

$x^2 + 4 > 0 \Rightarrow y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0$

	$-\infty$		-2		0		2		∞
y''		$-$	$\emptyset$	$+$	0	$-$	$\emptyset$	$+$	
		$\bigcap$		$\bigcup$	0	$\bigcap$		$\bigcup$	

Inflexní bod $[0; 0]$.
Asymptoty bez směrnice:

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x}{x^2 - 4} = \left\| \frac{2}{0^+} \right\| = \infty, \qquad \lim_{x \to 2^-} \frac{x}{x^2 - 4} = \left\| \frac{2}{0^-} \right\| = -\infty$$

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{x}{x^2 - 4} = \left\| \frac{-2}{0^-} \right\| = \infty, \qquad \lim_{x \to -2^-} \frac{x}{x^2 - 4} = \left\| \frac{-2}{0^+} \right\| = -\infty$$

Přímky $x = 2$ a $x = -2$ sou oboustranné asymptoty bez směrnice.
Asymptoty se směrnicí:

$$a_1 = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2 - 4} = 0, \qquad b_1 = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2 - 4} = 0$$

$$a_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2 - 4} = 0, \qquad b_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2 - 4} = 0$$

Přímka $y = 0$ je asymptotou se směrnicí pro $x \to \infty$ i $x \to -\infty$.

$H(f) = \mathbb{R}$

$$f : y = \frac{x}{x^2 - 4}$$